Автономная некоммерческая организация среднего профессионального образования

«УРАЛЬСКИЙ ПРОМЫШЛЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

**Методические указания**

**к практическим занятиям**

по дисциплине

**Теория вероятностей и математическая статистика**

**Укрупненная группа: 09.00.00** Информатика и вычислительная техника

**Специальность:** 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

2016

|  |  |
| --- | --- |
| Одобрена цикловой комиссией  информатики и вычислительной техники  Председатель комиссии  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ О. Г. Максимова  Протокол  от « » \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 201\_\_г. | Методические указания разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта по специальности среднего профессионального образования, входящей в состав укрупненной группы специальностей 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника» 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах»  *УТВЕРЖДАЮ*  Заместитель директора по  учебной работе АН ПОО «Уральский промышленно-экономический техникум»  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Н.Б. Чмель  « » \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 201 \_\_ г. |

Разработчик: **Максимова О.Г.** преподаватель спецдисциплин

АН ПОО «Уральский промышленно-экономический техникум»

Содержание

[Пояснительная записка 4](#_Toc480029690)

[Лабораторная работа 1 Вероятность случайного события 6](#_Toc480029691)

[Лабораторная работа 2 Определение вероятностей сложных событий. 9](#_Toc480029692)

[Лабораторная работа 3Формула полной вероятности. Формула Байеса 13](#_Toc480029693)

[Лабораторная работа 4  Серии независимых испытаний. Формула Бернулли. Предельные теоремы. 17](#_Toc480029694)

[Лабораторная работа 5 Распределение дискретной случайной величины. Характеристики ДСВ 20](#_Toc480029695)

[Лабораторная работа 6 Функция плотности распределения НСВ. Характеристики НСВ 23](#_Toc480029696)

[Лабораторная работа 7  Решение задач на применение предельных теорем. 26](#_Toc480029697)

[Лабораторная работа 8  Построение полигона и гистограммы 30](#_Toc480029698)

[Лабораторная работа 9 Вычисление числовых характеристик вариационных рядов 35](#_Toc480029699)

[Лабораторная работа 10 Точечные и интервальные оценки параметров распределения 39](#_Toc480029700)

[Лабораторная работа 11 Метод произведений для вычисления выборочной средней и дисперсии 41](#_Toc480029701)

[Лабораторная работа 12 Проверка гипотезы о законе распределения на основе согласия Пирсона 42](#_Toc480029702)

[Лабораторная работа 13 Отыскание параметров выборочного уравнения регрессии по сгруппированным данным 44](#_Toc480029703)

[Лабораторная работа 14 Выделение категорий и построение статистического ряда в пакете R 45](#_Toc480029704)

[Лабораторная работа 15 Построение матриц смежности и инцидентности 46](#_Toc480029705)

[Лабораторные работы 16-17Определение эйлерова цикла в графе. Гамильтоновы графы 51](#_Toc480029706)

[Список рекомендуемой литературы 55](#_Toc480029707)

# Пояснительная записка

Рабочая программа учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» является частью основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности среднего профессионального образования, входящей в состав укрупненной группы специальностей «Информатика и вычислительная техника» по специальности 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах»

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» входит в математический и естественнонаучный цикл.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь:**

* применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач;
* пользоваться расчётными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач;
* применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа;

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать:**

* основные понятия комбинаторики;
* основы теории вероятностей и математической статистики;
* основные понятия теории графов

Содержание дисциплины ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей ОПОП по специальности «Программирование в компьютерных системах» и овладению профессиональными компетенциями (ПК).

ПК1.1 Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент;

ПК1.2 Осуществлять разработку кода программного продукта на основе спецификаций на уровне модуля;

ПК2.4Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных;

ПК3.4Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

В процессе освоения дисциплины у студентов должны быть сформированы общие компетенции:

ОК1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес;

ОК2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;

ОК3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность;

ОК4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития;

ОК5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности;

ОК6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями;

ОК7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (починенных), за результат выполнения заданий;

ОК8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации;

ОК9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности;

ОК10. Исполнять воинскую обязанность, в том числе с применением полученных профессиональных знаний (для юношей).

В рабочей программе дисциплины предусмотрено 34 часа практических и лабораторных занятий.

# Лабораторная работа 1 Вероятность случайного события

**Цель занятия**: Овладеть навыками решения задач с помощью классической схемы

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения**

Испытанием называется осуществление некоторого комплекса условий с элементом случайности. Результат испытания называется событием.

Элементарные события представляют собой все возможные взаимоисключающие исходы одного испытания. Событие может быть элементарным или состоять из некоторого числа элементарных событий.

Несколько событий называются равновозможными, если нет оснований считать, что в данном испытании появление одного из них более возможно, чем появление любого другого из них.

Событие называется благоприятствующим некоторому событию, если появление первого влечет за собой появление второго.

В случае классической вероятности рассматриваются равновозможные исходы некоторого испытания, причем их число конечное. Вероятность события тогда можно вычислить по формуле: 

где m – числа событий, благоприятствующих A;

n – число элементарных событий для данного испытания.

Каждое из значений и может находиться интуитивно, по формулам комбинаторики или с применением правил сложения и умножения.

**Задания для самостоятельной работы**

**Вариант 1**

1. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вытянутого шара не превышает десяти?
2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одного размера. Полученные кубики перемешаны. Определить вероятность того, что на удачу выбранный кубик будет иметь ровно две окрашенные грани?
3. Из полной колоды карт (52 шт.) достают 4 карты. Какова вероятность того, что 3 карты будут красной масти одна черной?
4. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношенных. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся не изношенные элементы.
5. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что две случайно названные цифры образуют это число.

**Вариант 2**

1. В ящике 20 шаров с номерами с номерами от 15 до 35. Какова вероятность вынуть из него шар с номером 37?
2. Какова вероятность того, что наудачу выбранное натуральное число из диапазона 1-100 делится на 6 нацело?
3. Из колоды карт (36 шт.) достают 7 карт. Какова вероятность того, что 3 карты пики и 4 бубны?
4. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобрали 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц будут 3 женщины.
5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

**Вариант 3**

1. В коробке 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из коробки черный шар?
2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одного размера. Полученные кубики перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу выбранный кубик не будет иметь окрашенных граней.
3. Из полной колоды карт (52 шт.) достают 6 карт. Какова вероятность того, что все они будут красной масти?
4. В ящике лежит 5 черных и 8 красных шаров. Достают 4 шара. Какова вероятность того, что вынут один черный шар и три красных?
5. Задумано трехзначное число. Найти вероятность того, что три случайно названные цифры образуют это число.

**Вариант 4**

1. На столе 9 ручек: 4 черных и 5 красных. Какова вероятность взять со стола ручку синего цвета?
2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одного размера. Полученные кубики перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу выбранный кубик будет иметь ровно одну окрашенную грань.
3. Из колоды карт (36 шт.) достают 3 карты. Какова вероятность того, что это будут «десятки»?
4. На полке стоят 5 детективов и 9 учебников. Наугад берут 6 книг. Какова вероятность того, что 2 книги будут учебниками и 4 детективами?
5. В коробке 5 одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Определить вероятность того, что кубики появятся в порядке возрастания номеров.

**Вариант 5**

1. Пассажир ждет на остановке трамвай № 13 или № 15. Кроме них здесь останавливаются трамваи № 8, 4, 16, 26. Считая, что трамваи всех маршрутов появляются одинаково часто, найти вероятность того, что первый подошедший трамвай будет 3 маршрута.
2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одного размера. Полученные кубики перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу выбранный кубик будет иметь три окрашенные грани.
3. В шахматном турнире участвуют 20 человек. Среди них 5 сильных игроков. Какова вероятность того, что три наугад названных игрока будут из числа сильных?
4. В шкафу лежит 5 зеленых и 12 белых шарфов. Наудачу достают 7 шарфов. Какова вероятность того, что 5 шарфов будут белыми и 2 зелеными?
5. Набирая номер телефона абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, они различны, набрал их на удачу. Найти вероятность того, что набранные цифры неверны.

**Вариант 6**

1. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков будет меньше 2.
2. Какова вероятность того, что наудачу выбранное число из диапазона 1-100 нацело делится на 7, но не делится на 2?.
3. В погребе стоит 8 банок с компотом и 7 с соленьями. Наугад достают 6 банок. Какова вероятность того, что одна банка будет с компотом, а остальные с соленьями?
4. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобрали 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.
5. Числа 1, 2, 3, 4, 5, расставляют случайным образом. Какова вероятность того, что получится число 52134?

# Лабораторная работа 2 Определение вероятностей сложных событий.

**Цель занятия**: Научиться решать задачи на использование теорем о вероятности суммы двух и нескольких событий. Закрепить навыки решения задач на вычисление вероятности произведения зависимых и независимых событий.Закрепить навыки решения задач на вычисление вероятности произведения зависимых и независимых событий.

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения**

Суммой событий называется событие, происходящее при появлении одного из слагаемых. Обозначение: C=A1+A2+A3+…+AN

Два события называются несовместными*,* если в данном испытании они не могут произойти одновременно. В противном случае события называются совместными.

Теорема 1. Вероятность суммы N несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.P(A1+A2+…+AN)=P(A1)+P(A2)+…+P(AN)

Теорема 2. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления.P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Теорема 3. Вероятность суммы трех совместных событий вычисляется по формуле:P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)+P(ABC)-P(BA)-P(AC)-P(BC).

Произведением событий называется событие, происходящее при появлении всех множителей. Обозначение: C=A1A2A3…AN

Два события называются независимыми, если появление или не появление одного из них не влияет на появление другого. В противном случае события называются зависимыми.

Теорема 4.Если события независимы, то вероятность произведения этих событий равна произведению вероятностей этих событий.P(A1A2…AN)=P(A1)P(A2)…P(AN) Условной вероятностью события А по событию В называется вероятность события А, вычисленная при условии, что событие В произошло. Обозначение: *РВ(А).*

Теорема 6. Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого события по первому.P(AB)=P(A)PА(B).

Теорема 7. Вероятность произведения трех зависимых событий вычисляется по формуле:P(ABC)=P(A)PА(B)PАВ(C).

**Задания для самостоятельной работы:**

**Вариант 1**

1. Два охотника стреляют в волка, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого охотника вероятность попадания в цель равна 0.1, для второго – 0,8. Какова вероятность попадания в волка?
2. Вероятность того, что в течение часа к станции подойдет первый поезд равна 0.5, второй – 0.3. Вероятность того, что оба поезда подойдут одновременно равна 0.001. Какова вероятность того, что в течение часа к станции подойдет хотя бы один поезд?
3. В урне 10 белых, 5 черных, 7 синих и 12 красных шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что он белый, черный или синий?
4. Какова вероятность того, что три наугад выбранных человека родились в понедельник?
5. Предприятие лампочки. Вероятность того, что лампочка годная равна 0.96. С вероятностью 0.75 годная лампочка оказывается первого сорта. Какова вероятность того, что наугад выбранная лампочка первого сорта?
6. Студент выучил 25 вопросов из 30. Для сдачи зачета надо ответить хотя бы на один вопрос из заданных двух. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет, если преподаватель задал оба вопроса сразу?

**Вариант 2**

1. Есть два станка. Вероятность того, что в течении одной смены возникнет неполадка одного станка равна 0.05. Вероятность поломки обоих станков одновременно равна 0.002. Найти вероятность того, что в течении смены возникнет неполадка хотя бы у одного станка.
2. На вешалке висит 4 черных шляпы, 5 синих и 6 коричневых. Наугад снимают одну шляпу. Какова вероятность того, что она будет коричневой или черной?
3. В ящике 4 белых, 5 красных, 8 зеленых и 3 голубых шара. Извлекается один шар. Какова вероятность того, что он красный, зеленый или белый?
4. Какова вероятность того, что при четырех бросаниях игрального кубика будет выпадать одинаковое число очков?
5. На полке стоит 7 книг классиков и 4 книги современных авторов. Поочередно берут две книги. Какова вероятность того, что оба раза были взяты книги современных авторов?
6. Некоторое устройство состоит из двух элементов. Вероятность сбоя первого элемента равна 0,03, второго – 0,07. Какова вероятность того, что устройство выйдет из строя, если для этого достаточно сбоя хотя бы одного элемента?

**Вариант 3**

1. В погребе находится 5 банок с яблоками, 3 банки с грушами и 4 персиками. Какова вероятность достать банку с грушами или персиками?
2. При изготовлении детали может появиться два вида брака с вероятностями 0.2 и 0.4. Вероятность появления обоих видов брака равна 0.06. Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется бракованной?
3. В цехе работает несколько станков. Вероятность того, что за смену потребует наладки ровно один станок, равна 0.2. Вероятность того, что за смену потребует наладки два станка, равна 0.13. Вероятность того, что за смену потребует наладки больше двух станков, равна 0.07. Какова вероятность того, что за смену придется проводить наладку станков?
4. Какова вероятность того, что при бросании игрального кубика три раза будет выпадать 5 очков?
5. На полке лежит 5 шарфов черного света и 4 белого. Поочередно выбирают два шарфа. Какова вероятность того, что они будут белого цвета?
6. При изготовлении детали может появиться два вида брака независимо друг от друга с вероятностями 0,2 и 0,4. Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется бракованной?

**Вариант 4**

1. Из колоды карт (36 штук) достают одну карту. Какова вероятность того, что это будет король или туз?
2. Имеется два телевизора. Вероятность поломки каждого из них равна 0,26. Вероятность поломки обоих равна 0,03. Какова вероятность того, что хотя бы один телевизор выйдет из строя?
3. Стрелок попадает в «десятку» с вероятностью 0,05, в «девятку» с вероятностью 0,2 в «восьмерку» - 0,6. Сделан один выстрел. Какова вероятность того, что выбито не менее восьми очков?
4. Какова вероятность того, что два случайно спрошенных человека родились в один и тот же день (день и месяц)?
5. В ящике находится 3 красных и 6 черных шаров. Из него поочередно извлекают 2 шара Какова вероятность того, что они оба будут красного цвета?
6. Оператор обслуживает две ЭВМ. Вероятность зависания каждой из них в течении часа равна 0,08. Какова вероятность того, что в течении часа зависнет хотя бы одна ЭВМ?

**Вариант 5**

1. В ящике находится 10 коричневых ботинок, 6 черных 3 серых. Наугад вынимают один ботинок. Какова вероятность того, что он будет серым или коричневым?
2. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания для первого равна 0,4, для второго – 0,7. Вероятность того, что попадут оба, равна 0,8. Какова вероятность поражения мишени?
3. В день физкультурника Сизов пошел на стадион. Можно было купить билет на футбол с вероятностью 0,3, на баскетбол с вероятностью 0,4 и на волейбол с вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что Сизов попал на соревнование?
4. Даны два ящика с шарами. В одном 5 белых, 7 красных и 15 черных шаров. В другом – 11 белых, 3 красных и 9 черных. Вынимают по одному шару из каждого ящика. Какова вероятность того, что оба будут красными?
5. Из колоды карт (52 штуки ) достают поочередно 3 карты. Какова вероятность того, что это будет тройка, семерка, туз?
6. Два охотника одновременно стреляют в медведя. Вероятность попадания для первого охотника равна 0,7, для второго – 0,8. Какова вероятность того, что медведь будет убит?

# Лабораторная работа 3Формула полной вероятности. Формула Байеса

**Цель занятия**: Научиться выбирать гипотезы и использовать для определения вероятностей сложных событий формулы полной вероятности и Байеса

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения**

Несколько событий образуют полную группу, если в результате данного испытания обязательно появится хотя бы одно из них.

Теорема 1. Если событие А может произойти только вместе с одной из гипотез Н1, Н2…НN, (Образующих полную группу попарно несовместных событий), то вероятность события А вычисляется по формуле полной вероятности:

Р(А) = Р(Н1)РН1(А) + Р(Н2)РН2(А) + … + Р(НN)PHN(A)

Теорема 2. Если при тех же условиях требуется найти вероятности гипотез после испытания, когда событие А уже имело место, то можно воспользоваться формулой Байеса *: *

**Задания для самостоятельной работы:**

**Вариант 1**

1. В цехе работают 20 станков. Из них 10 марки А, 6 марки В, и 4 марки С. Вероятность того, что деталь будет без брака для этих станков соответственно равны 0.9, 0.8 и 0.7. Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь будет браком?
2. Имеется два ящика с шарами. В первом ящике находится 2 белых и 1 черный шар, во втором – 1 белый и 4 черных. Наугад вынимают один шар из любого ящика. Какова вероятность того, что он будет черным?
3. Имеется два ящика с шарами. В первом ящике находится 2 белых и 1 черный шар, во втором – 1 белый и 4 черных. Наугад вынутый шар оказался черным. Какова вероятность того, что он вынут из первого ящика?
4. На фабрике первая машина производит 25% изделий, вторая – 35%, третья - остальные. Вероятность брака для каждой машины равна 0.5, 0.4 и 0.2. Случайно выбранное изделие оказалось бракованным. Определить, вероятнее всего, какой машиной изготовлено выбранное изделие.

**Вариант 2**

1. Фирма примет участие в гонках автомобилей. Для этой цели у нее есть 2 машины марки А, 3 машины марки В и 3 машины марки С. Вероятность победить в гонках для машин марки А равна 0,21, марки В – 0,25, марки С – 0,24. Какова вероятность фирмы победить, если она может выставить на гонки только одну машину?
2. При трехсменной работе в литейном цехе установлено, что I смена дает 85% годной продукции, II смена – 87%, III смена – 73%. Объем выпуска бракованного литья в каждой смене одинаков. Определить вероятность выпуска цехом бракованного литья.
3. При трехсменной работе в литейном цехе установлено, что I смена дает 85% годной продукции, II смена – 87%, III смена – 73%. Объем выпуска бракованного литья в каждой смене одинаков. Наугад выбранное литье оказалось бракованным. Определить вероятность изготовления его первой сменой.
4. Электролампочки изготавливают два завода: 70% – первый, 30% – второй. Из 100 лампочек первого завода 83 стандартные, а из 100 лампочек второго – 63 стандартные. Купленная лампочка оказалась нестандартной. Определить, вероятнее всего, на каком заводе была изготовлена эта лампочка.

**Вариант 3**

1. Есть четыре ящика. В первом 1 белый и 1 черный шар, во втором – 2 белых и 3 черных шара, в третьем – 3 белых и 5 черных, в четвертом – 4 белых и 2 черных. Наугад выбирают один из ящиков и вынимают оттуда один шар. Какова вероятность того, что он – белый?
2. В коробке 12 открыток «с днем рождения», 5 – «с 8 марта» и 3 – «с новым годом». Вытягивают наугад открытку к одному из указанных праздников (предполагается, что они равновозможны). Найти вероятность того, что открытка соответствует поводу.
3. В коробке 12 открыток «с днем рождения», 5 – «с 8 марта» и 3 – «с новым годом». Вытягивают наугад открытку к одному из указанных праздников (предполагается, что они равновозможны) и оказалось, что открытка соответствует поводу. Какова вероятность того, что сейчас НОВЫЙ ГОД?
4. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Случайно выбранный болт оказался бракованным. Определить, вероятнее всего какой машиной изготовлен выбранный болт.

**Вариант 4**

1. На зачете 5 билетов. Вероятность сдать зачет для студента в случае, если он достанет один из первых трех билетов, равна 0,4. Если он достанет четвертый билет, то она равна 0,3, если пятый билет, то 0,35. Студент вытянул билет. Какова вероятность, что он сдаст зачет?
2. В скачках участвует лошадь «Варвара», для которой выбрано 4 жокея. Для первого вероятность победить равна 0,3, для второго – 0,4, для третьего – 0,5, для четвертого – 0,45. Наугад выбирается жокей из присутствующих. Какова вероятность, что он победит?
3. В скачках участвует лошадь «Варвара», для которой выбрано 4 жокея. Для первого вероятность победить равна 0,3, для второго – 0,4, для третьего – 0,5, для четвертого – 0,45. Наугад выбранный жокей выигрывает. Какова вероятность, что это первый из предложенных жокеев?
4. На заводе изготавливаются детали трех видов, причем первого вида 40% продукции, второго вида – 30% и третьего вида – остальное. Среди 100 деталей первого вида 12 покрашены, среди 100 деталей второго вида 53 покрашено и среди 100 деталей третьего вида 41 деталь покрашена. Взятая наугад деталь – покрашена. Определить, вероятнее всего, какого она вида.

**Вариант 5**

1. На кондитерской фабрике установлены три линии для упаковки печения. Первая выпускает 20% продукции, вторая – 30%, третья – 50%. Вероятность того, что произойдет отклонение от заданного веса для каждой линии, соответственно равна 0,1, 0,05 и 0,2. Какова вероятность того, что наугад выбранная упаковка будет иметь стандартный вес?
2. Ведется наблюдение за падением метеорита. Вероятность его падения на землю с понедельника по среду равна 0,6, в четверг или пятницу она равна 0,5, и в выходные – 0,3. Найти вероятность падения метеорита на этой неделе.
3. Ведется наблюдение за падением метеорита. Вероятность его падения на землю с понедельника по среду равна 0,6, в четверг или пятницу она равна 0,5, и в выходные – 0,3. Метеорит упал на указанной неделе. Найти вероятность того, что падение метеорита произошло в выходные.
4. Из трех учащихся двое получат неаттестацию по Теории вероятностей с вероятностью 0,2, а третий – с вероятностью 0,8. Произвольно выбранный студент оказался аттестованным по указанному предмету. Вероятнее всего какой это студент.

**Вариант 6**

1. Имеется группа из 5 человек. Вероятность для каждого из них иметь рост ниже 170 см, соответственно равна 0,1, 0,3, 0,75, 0,8 и 0,02. Какова вероятность того, что наугад выбранный человек будет выше 170 см?
2. Три станка-автомата штампуют валики. Первый изготавливает 23% изделий, второй – 16%, третий – остальные. Вероятность брака для каждого станка соответственно равна 0,14, 0,2 и 0,03. Найти вероятность того, что наугад выбранный валик будет бракованным.
3. Три станка-автомата штампуют валики. Первый изготавливает 23% изделий, второй – 16%, третий – остальные. Вероятность брака для каждого станка соответственно равна 0,14, 0,2 и 0,03. Наугад выбранный валик оказался бракованным. Найти вероятность того, что его изготовил третий станок.
4. Производится проверка четырех партий материала на содержание железа. Вероятность того, что будет обнаружено повышенное содержание железа для каждой партии, соответственно равна 0,4, 0,5, 0,13 и 0,82. В произвольно выбранном образце оказалось повышенное содержание железа. Вероятнее всего из какой партии взят этот образец.

# Лабораторная работа 4  Серии независимых испытаний. Формула Бернулли. Предельные теоремы.

Цель занятия: Научиться решать задачи на использование предельных теорем и формулы Бернулли.

Норма времени: 2 часа

Методическое обеспечение: методические указания к практической работе

Теоретические сведения

Несколько испытаний называются независимыми относительно события, если вероятность этого события в каждом из них не зависит от исходов других испытаний.

Схемой Бернулли называется последовательность независимых испытаний, для которых характерны следующие особенности:

Рассматриваемое событие является случайным;

Вероятность его появления в каждом из проведенных испытаний одинакова и равна p;

Вероятность не появления этого события в каждом испытании одинакова и равна q=1-p

В случае проведения схемы независимых испытаний Бернулли вероятность появления рассматриваемого события m раз из n испытаний можно вычислить используя три формулы.

Если n мало, n<10, то удобно воспользоваться формулой Бернулли, которая имеет следующий вид: 

Если n>10 и p или q близко к нулю, , то необходимо воспользоваться формулой Пуассона, которая имеет следующий вид: 

Если n<10 и p не удовлетворяет условиям из пункта 2, то нужно применить локальную формулу Муавра – Лапласа: , где 

Для определения вероятности появления события не менее m1 раз и не более m2 раз в серии из n испытаний необходимо воспользоваться интегральной формулой Муавра – Лапласа: , где 

**Задания для самостоятельной работы:**

**Вариант 1**

1. Вероятность брака на некотором производстве равна 0.2. Найти вероятность того что, среди пяти наугад взятых изделий будет не менее четырех годных.
2. Вероятность появления события в каждом их 180 независимых испытаний постоянна и равна 0.8. Какова вероятность того, что событие появится не менее 70 и не более 100 раз?
3. В группе 36 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на новый год.(Считаем что в году 365 дней).

**Вариант 2**

1. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что, при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.
2. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 6 новорожденных будет не более одного мальчика.
3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,74. Какова вероятность попадания в цель от 6 до 14 раз из 120.

**Вариант 3**

1. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 250 деталей. Вероятность того, что деталь стандартная равна 0,96. Определить вероятность того, что среди проверенных деталей окажется ровно 12 бракованных.
2. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 150 новорожденных будет не менее 2 и не более 50 мальчиков.
3. Вероятность получения удачного результата при проведении сложного химического опыта равна 0,2. Какова вероятность получения не менее 5 удачных результатов в серии из 6 опытов?

**Вариант 4**

1. Испытывается каждый из 5 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,8. Определить вероятность того, что не менее четырех элементов выдержит испытание.
2. Батарея произвела 27 выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти вероятность того, что будет ровно 10 попаданий в объект.
3. Вероятность появления события в каждом из 200 независимых испытаний постоянна и равна 0,03. Какова вероятность того, что событие появится не мене 50 и не более 110 раз?

**Вариант 5**

1. Прибор состоит из 50 независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что ровно 3 элемента откажут при включении.
2. Два спортсмена играют в настольный теннис. Вероятность выигрыша первого спортсмена равна 0,54. Какова вероятность того, что он выиграет не более одной партии из четырех?
3. Вероятность того, что сошедшая с конвейера деталь стандартная, равна 0,96. Найти вероятность того, что из 350 сошедших с конвейера деталей 300 окажутся стандартными.

**Вариант 6**

1. Вероятность появления события в каждом из 200 независимых испытаний постоянна и равна 0,2. Какова вероятность того, что событие появится ровно 70 раз?
2. Батарея произвела 8 выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что будет не менее 7 попаданий в объект.
3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Какова вероятность попадания в цель от 66 до 100 раз из 160

# Лабораторная работа 5 Распределение дискретной случайной величины. Характеристики ДСВ

**Цель занятия**: овладеть навыками построения рядов распределения, научиться использовать свойства рядов распределения.

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения**

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, множество возможных значений которой либо конечное либо бесконечное, но счетное.

Законом распределения случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями. Закон распределения ДСВ записывается в виде ряда распределения. Сумма всех вероятностей ряда равна единице.

Геометрическая интерпретация ряда распределения называется многоугольником распределения. Распределение может быть биноминальным, геометрическим, гипергеометрическим или пуассоновским.

Вероятность появления события при биноминальном распределении вычисляется по формуле Бернулли. Вероятность появления события при геометрическом распределении вычисляется по формуле вероятности произведения событий. Вероятность появления события при распределении Пуассона вычисляется по формуле Пуассона .

Вероятность появления события при гипергеометрическом распределении вычисляется по формуле 

**Задания для самостоятельной работы:**

**Вариант 1**

1. В заданном ряде распределения определить неизвестную величину, построить многоугольник распределения.
2. 2 4 6 9 12
3. 0,2 0,3 0,1 ? 0,2
4. В партии из 8 деталей 5 стандартных. Наудачу взяты 4 детали. Построить ряд распределения числа стандартных деталей среди отобранных.
5. В партии 15% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 3 изделия. Построить ряд распределения числа нестандартных деталей среди отобранных.

**Вариант 2**

1. В заданном ряде распределения определить неизвестную величину, построить многоугольник распределения.
2. -1 0 2 3 6
3. 0,3 0,2 ? 0,1 0,3
4. В коробке из 12 карандашей 3 красных. Наудачу взяты 3 карандаша. Построить ряд распределения числа красных карандашей среди отобранных.
5. В коробке 10% красных карандашей. Наудачу отобраны 4 карандаша. Построить ряд распределения числа не красных карандашей среди отобранных.

**Вариант 3**

1. В заданном ряде распределения определить неизвестную величину, построить многоугольник распределения.
2. 0 3 6 8 10
3. 0,1 0,3 0,1 0,1 ?
4. В ящике из 10 перчаток 4 на левую руку. Наудачу взяты 2 перчатки. Построить ряд распределения числа перчаток на левую руку среди отобранных.
5. В ящике 25% перчаток на левую руку. Наудачу отобраны 5 перчаток. Построить ряд распределения числа перчаток на правую руку среди отобранных.

**Вариант 4**

1. В заданном ряде распределения определить неизвестную величину, построить многоугольник распределения.
2. -3 -1 1 2 5
3. 0,5 ? 0,1 0,1 0,2
4. В ящике из 8 шаров 5 зеленых. Наудачу взяты 3 шара. Построить ряд распределения числа зеленых шаров среди отобранных.
5. В партии 20% зеленых шаров. Наудачу отобраны 4 шара. Построить ряд распределения числа не зеленых шаров среди отобранных.

**Вариант 5**

1. В заданном ряде распределения определить неизвестную величину, построить многоугольник распределения.
2. 10 20 25 28 30
3. 0,1 0,3 0,1 ? 0,1
4. В партии из 15 консервных банок 4 нестандартных. Наудачу взяты 3 банки. Построить ряд распределения числа нестандартных банок среди отобранных.
5. В партии 30% нестандартных консервных банок. Наудачу отобраны 5 банок. Построить ряд распределения числа нестандартных банок среди отобранных.

**Вариант 6**

1. В заданном ряде распределения определить неизвестную величину, построить многоугольник распределения.
2. 1 2 5 8 11
3. 0,1 0,4 0,1 ? 0,2
4. В коробке из 8 ручек 4 синих. Наудачу взяты 5 ручек. Построить ряд распределения числа синих ручек среди отобранных.
5. В коробке 15% синих ручек. Наудачу отобраны 3 ручки. Построить ряд распределения числа не синих ручек среди отобранных.

# Лабораторная работа 6 Функция плотности распределения НСВ. Характеристики НСВ

**Цель занятия**: овладеть навыками определения плотности распределения по функции, научиться использовать свойства плотности и функции распределения

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение**: методические указания к практической работе

**Теоретические сведения**

Случайнойназывается величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, которая может принять любое значение из некоторого интервала.

Законом распределения случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями. Закон распределения НСВ записывается в виде плотности распределения или функции распределения.

Распределение может быть нормальным, показательным и равномерным.

Функция и плотность распределения при нормальном распределении вычисляются по формуле

Функция и плотность распределения при показательном распределении вычисляется по формуле

Функция и плотность распределения при равномерном распределении вычисляется по формуле

Случайная величина имеет следующие числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия и средне квадратичное отклонение.

Математическим ожиданием НСВ называется следующая величина .

Дисперсией НСВ называется следующая величина 

Средне квадратичным отклонением НСВ называется следующая величина 

Для равномерного распределения числовые характеристики вычисляются по формулам

Для нормального распределения числовые характеристики вычисляются по формулам

Для показательного распределения числовые характеристики вычисляются по формулам

**Задания для самостоятельной работы:**

**Вариант 1**

1. Определить неизвестный параметр а
2. 
3. Найти плотность распределения случайной величины.
4. 
5. Построить графики функции и плотности распределения.
6. Найти математическое ожидание, дисперсию и средне квадратичное отклонение случайной величины заданной следующей плотностью распределения
7. 
8. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной плотностью распределения
9. 
10. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной функцией распределения
11. 

**Вариант 2**

1. Определить неизвестный параметр а
2. 
3. Найти плотность распределения случайной величины.
4. 
5. Найти математическое ожидание, дисперсию и средне квадратичное отклонение случайной величины заданной следующей плотностью распределения
6. 
7. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной плотностью распределения
8. 
9. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной функцией распределения
10. 
11. Построить графики функции и плотности распределения.

# Лабораторная работа 7  Решение задач на применение предельных теорем.

**Цель занятия**: научиться решать задачи с применением законов больших чисел

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения**

Неравенство Чебышева

В качестве леммы, необходимой для доказательства теорем, относящихся к группе «закона больших чисел», приведем одно весьма общее неравенство, известное под названием неравенства Чебышева.

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем 1-D(X)/ε



Неравенство Маркова

Неравенство Маркова применяют для оценки вероятности положительных случайных величин с неизвестным законом распределения.

Если у неотрицательной случайной величины X существует математическое ожидание М(Х), то при любом положительном ε имеет место неравенство

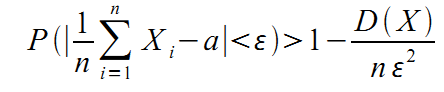


Теорема Чебышева

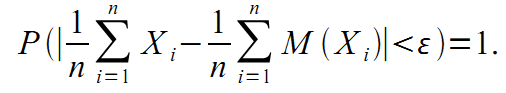
Эта теорема устанавливает связь между средним арифметическим наблюденных значений случайной величины и ее математическим ожиданием.

При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.

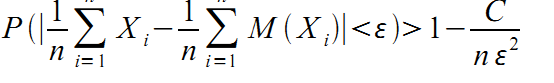
При доказательстве теоремы Чебышева получаем оценку:



Если X1, X2, …, Xn - независимые случайные величины с математическими ожиданиями M(X1), M(X2), …, M(Xn) и дисперсиями D(X1), D(X2), …, D(Xn) и если все дисперсии ограничены сверху одним и тем же числом L: D(Xi)<L (i=1,2, …, n), то при возрастании n среднее арифметическое наблюдаемых значений величин X1, X2, …, Xn сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:



При доказательстве теоремы Чебышева получаем оценку:



Теорема Бернулли

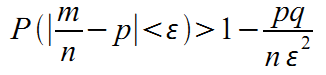
Известная теорема Бернулли, устанавливающая связь между частотой события и его вероятностью, является прямым следствием закона больших чисел.

При неограниченном увеличении числа опытов n частота события А сходится по вероятности к его вероятности р:



где m/n - частота события А в n опытах, ε - сколь угодно малое положительное число.

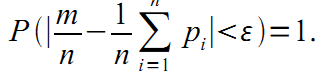
При доказательстве теоремы Бернулли получаем оценку:



Теорема Пуассона

Теорема Бернулли утверждает устойчивость частоты при постоянных условиях опыта. Но при изменяющихся условиях опыта аналогичная устойчивость также существует. Теорема, устанавливающая свойство устойчивости частот при переменных условиях опыта, называется теоремой Пуассона и формулируется следующим образом:

Если производится n независимых опытов и вероятность появления события А в i-м опыте равна рi то при увеличении n частота события А сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей рi.



Центральная предельная теорема

Все формы центральной предельной теоремы посвящены установлению условий, при которых возникает нормальный закон распределения. Так как эти условия на практике весьма часто выполняются, нормальный закон является самым распространенным из законов распределения, наиболее часто встречающимся в случайных явлениях природы.

Центральная предельная теорема Ляпунова

Различные формы центральной предельной теоремы отличаются между собой условиями, накладываемыми на распределения образующих сумму случайных слагаемых.

Центральная предельная теорема Ляпунова показывает, что при достаточно большом числе n независимых случайных величин X1, X2, …, Xn ,

подчиненных каким угодно законам распределения (при соблюдении некоторых ограничений), их сумма будет иметь закон распределения, как угодно близкий к нормальному закону.

Сформулируем одну из самих простых форм центральной предельной теоремы, относящуюся к случаю одинаково распределенных слагаемых.Если X1, X2, …, Xn - независимые случайные величины, имеющие один и тот

же закон распределения с математическим ожиданием т и дисперсией σ2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы Y n=∑неограниченно приближается к нормальному.

В практических задачах часто применяют центральную предельную теорему для определения вероятности того, что сумма нескольких случайных величин окажется в заданных пределах.

Теорема Лапласа

Частным случаем центральной предельной теоремы для дискретных случайных величин является теорема Лапласа.

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью р, то справедливо соотношение

где Y — число появлений события А в n опытах, q=1- р

**Задания для самостоятельной работы**

1. Вероятность появления события в каждом испытании равна 1/4. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

3. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время Т лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время Т окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

4. Вероятность появления события в каждом испытании равна 1/4. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X 0,3 0,6

P 0,2 0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что .

7. Средняя величина вклада в некоторой сберегательной кассе составляет 50 руб. Оцените вероятность того, что наудачу выбранный вклад не превысит 2000 руб.

8. Математическое ожидание начальной скорости снаряда равно 600 м/сек. Оцените вероятность того, что могут наблюдаться значения начальной скорости, превышающие 900 м/сек.

9. Если среднее значение начальной скорости снаряда равно 600 м/сек, то какие значения скорости можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,4?

10.Средняя температура в квартире, подключенной к теплоцентрали, в период отопительного сезона составляет 20°С, а среднее квадратическое отклонение равно 2°С. Оцените вероятность того, что температура в квартире отклонится от средней по абсолютной величине не более чем на 5°С.

**Контрольные вопросы**

1. О чем говорит закон больших чисел?
2. Что называют законом больших чисел в форме Чебышева?
3. Сформулируйте неравенство Чебышева в двух его формах.
4. К каким случайным величинам можно применить неравенство Чебышева?
5. Сформулируйте теорему Чебышева. В каких условиях она применима?
6. Какой практический вывод делается на основе теоремы Чебышева по поводу оценки математического ожидания случайной величины?
7. Сформулируйте теорему Бернулли.
8. Какой практический вывод делается на основе теоремы Бернулли по поводу оценки неизвестной вероятности события?
9. Сформулируйте центральную предельную теорему.
10. Как практически используется центральная предельная теорема?

# Лабораторная работа 8  Построение полигона и гистограммы

**Цель занятия**: Научиться составлять дискретный вариационный ряд, строить многоугольник частот и частостей. Закрепить навыки, полученные при самостоятельном изучении материала, научиться составлять эмпирическую функцию распределения, вычислять выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочные начальные и центральные моменты

.**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения**

Совокупность всех мысленно возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения конкретных значений случайной величины, или совокупность результатов всех мыслимых наблюдений, проводимых в неизменных условиях над одной из случайных величин, связанных с данным видом объектов, называется генеральной совокупностью. Часть отобранных объектов из генеральной совокупности (результаты наблюдений над ограниченным числом объектов из этой совокупности) называется выборочной совокупностью или выборкой.

Ранжированием опытных данных называется упорядочивание их в порядке возрастания значений. Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называется вариантом. Численность отдельной группы сгруппированного ряда наблюдаемых данных называется частотой соответствующего варианта и обозначается Mi, i – номер варианта. Отношение частоты данного варианта к общей сумме частот всех вариантов называется частостью и обозначается , i – индекс варианта.

Дискретным вариационным рядом называется ранжированная совокупность вариантов с соответствующими частотами и частостями.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования с соответствующими частотами и частостями.

Дискретным вариационным рядом называется ранжированная совокупность вариантов с соответствующими частотами и частостями.

Эмпирической функцией распределения называется функция , задающая для каждого значения **х** относительную частоту события: «вариант меньше **х**», то есть , где *mx* – число выборочных значений меньших х, *n* – объем выборки.

Выборочным средним наблюдаемых значений называется частное от деления суммы всех этих значений на их число. Для вариационного ряда выборочное среднее вычисляется по формуле  или , где *xi* – вариант (для ДВР) или среднее значение интервала варьирования (для ИВР); *mi* – частота варианта;  - частость; *n* – объем выборки; *k* – количество вариантов.

Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений случайной величины от их выборочного среднего. Для вариационного ряда она вычисляется по формулам:  и , где  - выборочное среднее.

Выборочным среднеквадратичным отклонением называется арифметический квадратный корень из выборочной дисперсии. .

-----------------------------------------------------------------

Теория вероятности и математическая статистика

Модой М0 распределения значений случайной величины является вариант с наибольшей частотой появления.

Медианой Ме распределения значений случайной величины является точка на числовой оси, находящаяся на середине интервала значений.

Выборочное среднее и выборочная дисперсия являются частным случаем момента вариационного ряда.

Начальным выборочным моментом порядка s называется среднее арифметическое s–тых степеней наблюдаемых значений случайной величины, . Центральным выборочным моментом порядка s называется среднее арифметическое s-тых степеней отклонений наблюдаемых значений случайной величины от их выборочного среднего. .

Выборочным коэффициентом асимметрии называется число, определяемое формулой: . Этот коэффициент служит для характеристики асимметрии полигона вариационного ряда.

Выборочным эксцессом или коэффициентом крутости называется число, определяемое формулой: . Выборочный эксцесс служит для сравнения на «крутость» выборочного распределения с нормальным.

***.* Задания для самостоятельной работы:**

**Вариант 1**

2, 6, 7, 3, 6, 6, 2, 7, 7, 6, 7, 6, 3, 3, 2, 6, 7, 3, 7, 2, 2, 3, 7, 6, 3, 6, 2, 7, 6, 3, 2, 7, 3, 6, 2, 6, 7, 3, 6, 2, 7, 2, 6, 3, 6, 7, 2, 3, 6, 7, 2, 6, 2, 2, 3, 7, 2, 2, 6, 3, 7, 2, 6, 3, 3, 3, 3, 7, 6, 6, 6, 2, 6, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 7, 2, 6, 3, 2, 2, 7, 2, 2, 6, 3, 7, 2, 6, 3, 2, 3, 2, 6, 2, 6.

1. Выборка представлена дискретным вариационным рядом:

-1 3 4 6 8

23 12 4 48 13

Построить эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде и график.

Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение. Найти моду и медиану, а также найти начальные моменты 0, 1 и 2 порядков и центральные моменты 0, 1, 2 и 3 порядков.

1. Выборка представлена интервальным вариационным рядом:

-1;1 1;3 3;5 5;7 7;9

3 2 41 4 3

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Построить гистограмму частот и вычислить коэффициент асимметрии и выборочный эксцесс. Провести анализ полученных результатов.

**Вариант 2**

1, 8, 9, 0, 8, 9, 8, 1, 9, 8, 9, 1, 8, 1, 8, 9, 1, 8, 9, 1, 8, 1, 9, 8, 9, 8, 1, 8, 9, 8, 1, 8, 9, 1, 8, 1, 9, 8, 1, 9, 8, 1, 9, 8, 9, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 0, 8, 1, 1, 8, 9, 8, 9, 9, 9, 9, 8, 1, 1, 8, 9, 1, 1, 9, 1, 1, 8, 9, 1, 9, 1, 1, 1, 8, 1, 8, 1, 9, 1, 1, 9, 1, 0, 1, 9, 1, 0, 1, 9, 1, 9, 8, 9, 1.

1. Выборка представлена дискретным вариационным рядом:

-4 -1 2 3 5

3 22 43 4 15

Построить эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде и график.

Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение. Найти моду и медиану, а также найти начальные моменты 0, 1 и 2 порядков и центральные моменты 0, 1, 2 и 3 порядков

.

1. Выборка представлена интервальным вариационным рядом:

0;1 1;2 2;3 3;4 4;5

5 3 14 8 10

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Построить гистограмму частот и вычислить коэффициент асимметрии и выборочный эксцесс. Провести анализ полученных результатов.

**Вариант 3**

8, 2, 4, 8, 8, 4, 2, 3, 8, 4, 8, 4, 8, 2, 3, 8, 4, 8, 3, 8, 4, 8, 3, 8, 4, 8, 3, 8, 4, 8, 3, 2, 8, 4, 8, 3, 2, 8, 4, 8, 3, 2, 8, 4, 8, 0, 3, 8, 4, 8, 3, 4, 2, 4, 8, 3, 8, 4, 8, 8, 4, 8, 8, 3, 8, 4, 8, 3, 8, 8, 4, 3, 8, 8, 3, 8, 4, 8, 2, 8, 4, 8, 3, 8, 8, 4, 8, 4, 8, 3, 4, 8, 3, 8, 8, 4, 8, 3, 8, 4.

1. Выборка представлена дискретным вариационным рядом:

-2 -1 4 5 6

3 22 12 8 3

Построить эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде и график.

Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение. Найти моду и медиану, а также найти начальные моменты 0, 1 и 2 порядков и центральные моменты 0, 1, 2 и 3 порядков.

1. Выборка представлена интервальным вариационным рядом:

1;3 3;5 5;7 7;9 9;11

21 2 6 18 1

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Построить гистограмму частот и вычислить коэффициент асимметрии и выборочный эксцесс. Провести анализ полученных результатов.

**Вариант 4**

1, 6, 5, 2, 6, 1, 5, 2, 6, 1, 5, 6, 2, 5, 1, 6, 5, 2, 6, 5, 1, 6, 2, 1, 5, 2, 6, 1, 5, 6, 2, 5, 1, 5, 2, 5, 6, 2, 5, 6, 1, 5, 6, 6, 6, 5, 6, 5, 2, 1, 6, 1, 1, 6, 2, 5, 1, 2, 1, 5, 2, 1, 6, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 5, 2, 6, 6, 1, 2, 6, 1, 5, 5, 6, 1, 6, 6, 1, 5, 2, 1, 6, 5, 2, 1, 5, 2, 6, 1, 5, 1, 5, 1, 5.

1. Выборка представлена дискретным вариационным рядом:

-12 -10 -4 -2 1

13 1 7 19 3

Построить эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде и график.

Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение. Найти моду и медиану, а также найти начальные моменты 0, 1 и 2 порядков и центральные моменты 0, 1, 2 и 3 порядков.

1. Выборка представлена интервальным вариационным рядом:

1;4 4;7 7;19 10;13 3;16

1 37 6 9 4

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Построить гистограмму частот и вычислить коэффициент асимметрии и выборочный эксцесс. Провести анализ полученных результатов.

**Вариант 5**

1, 8, 5, 3, 1, 8, 5, 3, 8, 1, 5, 3, 8, 1, 5, 3, 8, 5, 1, 3, 1, 5, 3, 8, 1, 8, 5, 3, 8, 1, 8, 1, 8, 3, 1, 8, 3, 8, 1, 5, 3, 5, 1, 8, 3, 5, 8, 1, 5, 3, 8, 1, 8, 5, 3, 8, 8, 8, 1, 3, 8, 1, 5, 3, 8, 1, 3, 8, 1, 8, 1, 8, 3, 5, 8, 1, 3, 8, 1, 8, 3, 8, 5, 1, 3, 8, 1, 5, 8, 1, 3, 8, 1, 3, 8, 1, 8, 3, 8, 1.

1. Выборка представлена дискретным вариационным рядом:

-1 0 5 6 12

5 62 2 15 4

Построить эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде и график.

Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение. Найти моду и медиану, а также найти начальные моменты 0, 1 и 2 порядков и центральные моменты 0, 1, 2 и 3 порядков.

1. Выборка представлена интервальным вариационным рядом:

1;5 5;9 9;13 13;17 17;21

9 32 9 11 6

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Построить гистограмму частот и вычислить коэффициент асимметрии и выборочный эксцесс. Провести анализ полученных результатов.

# Лабораторная работа 9 Вычисление числовых характеристик вариационных рядов

**Цель занятия**: Закрепить навыки, полученные при самостоятельном изучении материала, научиться составлять эмпирическую функцию распределения, вычислять выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочные начальные и центральные моменты

*.***Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения**

**Интервальным вариационным рядом** называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования с соответствующими частотами и частостями.

Дискретным вариационным рядом называется ранжированная совокупность вариантов с соответствующими частотами и частостями.

Эмпирической функцией распределения называется функция , задающая для каждого значения **х** относительную частоту события: «вариант меньше **х**», то есть , где *mx* – число выборочных значений меньших х, *n* – объем выборки.

Выборочным средним наблюдаемых значений называется частное от деления суммы всех этих значений на их число. Для вариационного ряда выборочное среднее вычисляется по формуле  или , где *xi* – вариант (для ДВР) или среднее значение интервала варьирования (для ИВР); *mi* – частота варианта;  - частость; *n* – объем выборки; *k* – количество вариантов.

Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений случайной величины от их выборочного среднего. Для вариационного ряда она вычисляется по формулам:  и , где  - выборочное среднее.

Выборочным среднеквадратичным отклонением называется арифметический квадратный корень из выборочной дисперсии. .

-----------------------------------------------------------------

Теория вероятности и математическая статистика

Модой М0 распределения значений случайной величины является вариант с наибольшей частотой появления.

Медианой Ме распределения значений случайной величины является точка на числовой оси, находящаяся на середине интервала значений.

Выборочное среднее и выборочная дисперсия являются частным случаем момента вариационного ряда.

Начальным выборочным моментом порядка s называется среднее арифметическое s–тых степеней наблюдаемых значений случайной величины, . *Центральным* выборочным моментом порядка s называется среднее арифметическое s-тых степеней отклонений наблюдаемых значений случайной величины от их выборочного среднего. .

Выборочным коэффициентом асимметрии называется число, определяемое формулой: . Этот коэффициент служит для характеристики асимметрии полигона вариационного ряда.

Выборочным эксцессом или коэффициентом крутости называется число, определяемое формулой: . Выборочный эксцесс служит для сравнения на «крутость» выборочного распределения с нормальным.

**Задания для самостоятельной работы**

**Вариант 1**

1. Выборка представлена дискретным вариационным рядом:

-1 3 4 6 8

23 12 4 48 13

Построить эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде и график.

Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение. Найти моду и медиану, а также найти начальные моменты 0, 1 и 2 порядков и центральные моменты 0, 1, 2 и 3 порядков.

1. Выборка представлена интервальным вариационным рядом:

-1;1 1;3 3;5 5;7 7;9

3 2 41 4 3

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Построить гистограмму частот и вычислить коэффициент асимметрии и выборочный эксцесс. Провести анализ полученных результатов.

**Вариант 2**

1. Выборка представлена дискретным вариационным рядом:

-4 -1 2 3 5

3 22 43 4 15

Построить эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде и график.

Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение. Найти моду и медиану, а также найти начальные моменты 0, 1 и 2 порядков и центральные моменты 0, 1, 2 и 3 порядков.

1. Выборка представлена интервальным вариационным рядом:

0;1 1;2 2;3 3;4 4;5

5 3 14 8 10

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Построить гистограмму частот и вычислить коэффициент асимметрии и выборочный эксцесс. Провести анализ полученных результатов.

**Вариант 3**

1. Выборка представлена дискретным вариационным рядом:

-2 -1 4 5 6

3 22 12 8 3

Построить эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде и график.

Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение. Найти моду и медиану, а также найти начальные моменты 0, 1 и 2 порядков и центральные моменты 0, 1, 2 и 3 порядков.

1. Выборка представлена интервальным вариационным рядом:

1;3 3;5 5;7 7;9 9;11

21 2 6 18 1

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Построить гистограмму частот и вычислить коэффициент асимметрии и выборочный эксцесс. Провести анализ полученных результатов.

**Вариант 4**

1. Выборка представлена дискретным вариационным рядом:

-12 -10 -4 -2 1

13 1 7 19 3

Построить эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде и график.

Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение. Найти моду и медиану, а также найти начальные моменты 0, 1 и 2 порядков и центральные моменты 0, 1, 2 и 3 порядков.

1. Выборка представлена интервальным вариационным рядом:

1;4 4;7 7;19 10;13 3;16

1 37 6 9 4

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Построить гистограмму частот и вычислить коэффициент асимметрии и выборочный эксцесс. Провести анализ полученных результатов.

**Вариант 5**

1. Выборка представлена дискретным вариационным рядом:

-1 0 5 6 12

5 62 2 15 4

Построить эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде и график.

Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение. Найти моду и медиану, а также найти начальные моменты 0, 1 и 2 порядков и центральные моменты 0, 1, 2 и 3 порядков.

1. Выборка представлена интервальным вариационным рядом:

1;5 5;9 9;13 13;17 17;21

9 32 9 11 6

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Построить гистограмму частот и вычислить коэффициент асимметрии и выборочный эксцесс. Провести анализ полученных результатов.

# Лабораторная работа 10 Точечные и интервальные оценки параметров распределения

**Цель занятия**: Научиться определять точечные и интервальные оценки параметров распределения.

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения**

Точности оценки, доверительная вероятность (надежность). Доверительный интервал

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Все оценки, рассмотренные выше, - точечные. При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т.е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборке следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок (смысл этих понятий выясняется ниже).

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика \* служит оценкой неизвестного параметра Θ. Будем считать Θ постоянным числом (Θ может быть и случайной величиной). Ясно, что Θ\* тем точнее определяет параметр Θ, чем меньше абсолютная величина разности ׀Θ−Θ\*׀. Другими словами, если δ>0 и ׀Θ−Θ\*׀<δ, то чем меньше δ, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует точность оценки.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка Θ\* удовлетворяет неравенству ׀Θ−Θ\*׀<δ; можно лишь говорить о вероятности ɣ, с которой это неравенство осуществляется.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ\* называют вероятность ɣ, с которой осуществляется неравенство ׀Θ−Θ\*׀<δ. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве ɣ берут число, близкое к единице. Наиболее часто задают надежность, равную 0,95; 0,99 и 0,999.

Пусть вероятность того, что ׀Θ−Θ\*׀<δ, равна ɣ:

*Р*[׀Θ−Θ\*׀<δ]=ɣ.

Заменив неравенство ׀Θ−Θ\*׀<δ равносильным ему двойным неравенством −δ<Θ−Θ\*<δ, или Θ\*−δ<Θ<Θ\*+δ,имеем

*Р* [Θ\*−δ<Θ<Θ\*+δ]=ɣ.

Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал (Θ\*−δ, Θ\*+δ) заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ, равна ɣ.

Доверительным называют интервал (Θ\*−δ, Θ\*+δ), который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью ɣ.

**Задания для самостоятельной работы**

**Вариант1**

Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=10;

186 192 194

2 5 3

**Вариант2**

Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=100

340 360 375 380

20 50 18 12

Указание. Перейти к условным вариантам =-360

**Вариант3**

Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=100

2502 2804 2903 3028

8 30 60 12

Указание. Перейти к условным вариантам =-2844

**Вариант4**

Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=10

0,01 0,04 0,08

5 3 2

**Вариант5**

Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=50

0,1 0,5 0,6 0,8

5 15 20 10

Указание. Перейти к условным вариантам =

# Лабораторная работа 11 Метод произведений для вычисления выборочной средней и дисперсии

**Цель занятия:** Научиться проверять гипотезы о законе распределения на основе согласия Пирсона

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения:**

# Лабораторная работа 12 Проверка гипотезы о законе распределения на основе согласия Пирсона

**Цель занятия:** Научиться проверять гипотезы о законе распределения на основе согласия Пирсона

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения:**

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерии согласия Пирсона

Если закон распределения неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его А), то проверяют нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону А.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Критерий Пирсона не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

Итак, пусть по выборке объема *п* получено эмпирическое распределение:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Варианты |  |  |  |  |
| Эмп. частоты |  |  |  |  |

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты / При уровне значимости *α* требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить гипотезу : генеральная совокупность распределена нормально, надо сначала вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия:

и по таблице критических точек распределения , по заданному уровню значимости и числу степеней свободы k=s−3 найти критическую точку

Если - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если - нулевую гипотезу отвергают.

**Задания для самостоятельной работы:**

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности Х с заданным эмпирическим распределением.

**Ваиант1**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № интервала  i | Граница интервала | | Частота | Номер интервала  i | Граница интервала | | Частота |
|  |  |  |  |
| 1 | -20 | -10 | 20 | 5 | 20 | 30 | 40 |
| 2 | -10 | 0 | 47 | 6 | 30 | 40 | 16 |
| 3 | 0 | 10 | 80 | 7 | 40 | 50 | 8 |
| 4 | 10 | 20 | 89 |  |  |  | **n=300** |

**Ваиант2**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № интервала  i | Граница интервала | | Частота | Номер интервала  i | Граница интервала | | Частота |
|  |  |  |  |
| 1 | 1 | 3 | 2 | 7 | 13 | 15 | 16 |
| 2 | 3 | 5 | 4 | 8 | 15 | 17 | 11 |
| 3 | 5 | 7 | 6 | 9 | 17 | 19 | 7 |
| 4 | 7 | 9 | 10 | 10 | 19 | 21 | 5 |
| 5 | 9 | 11 | 18 | 11 | 21 | 23 | 1 |
| 6 | 11 | 13 | 20 |  |  |  | **n=100** |

**Ваиант3**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № интервала  i | Граница интервала | | Частота | Номер интервала  i | Граница интервала | | Частота |
|  |  |  |  |
| 1 | 6 | 16 | 8 | 6 | 56 | 66 | 8 |
| 2 | 16 | 26 | 7 | 7 | 66 | 76 | 6 |
| 3 | 26 | 36 | 16 | 8 | 76 | 86 | 5 |
| 4 | 36 | 46 | 35 |  |  |  |  |
| 5 | 46 | 56 | 15 |  |  |  | **n=100** |

**Ваиант4**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № интервала  i | Граница интервала | | Частота | Номер интервала  i | Граница интервала | | Частота |
|  |  |  |  |
| 1 | 5 | 10 | 7 | 6 | 30 | 35 | 19 |
| 2 | 10 | 15 | 8 | 7 | 35 | 40 | 14 |
| 3 | 15 | 20 | 15 | 8 | 40 | 45 | 10 |
| 4 | 20 | 25 | 18 | 9 | 45 | 50 | 6 |
| 5 | 25 | 30 | 23 |  |  |  | **n=120** |

Указание. Объединить малочисленные частоты первых двух и последних двух интервалов, а также сами интервалы.

# Лабораторная работа 13 Отыскание параметров выборочного уравнения регрессии по сгруппированным данным

**Цель занятия:**

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения:**

**Задания для самостоятельной работы:**

# Лабораторная работа 14 Выделение категорий и построение статистического ряда в пакете R

**Цель занятия:****Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения:**

**Задания для самостоятельной работы**

# Лабораторная работа 15 Построение матриц смежности и инцидентности

**Цель занятия:** Научиться строить матрицы смежности и инцидентности

**Норма времени**: 2 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения:**

Граф - Пара объектов G = ( X , Г ) ,где Х - конечное множество ,а Г –конечное подмножество прямого произведения Х\*Х . При этом Х называется множеством вершин , а Г - множеством дуг графа G .

Любое конечное множество точек (вершин), некоторые из которых попарно соединены стрелками , (в теории графов эти стрелки называются дуга-ми), можно рассматривать как граф.

Если в множестве Г все пары упорядочены, то такой граф называют ориентированным .

Дуга- ребро ориентированного графа.

Граф называется вырожденным, если у него нет рёбер.

Вершина Х называется инцидентной ребру G , если ребро соединяет эту вершину с какой-либо другой вершиной.

Подграфом, порождённым множеством вершин U называется подграф, множество вершин которого – U, содержащий те и только те рёбра, оба конца которых входят в U.

Подграф называется остовным подграфом, если множество его вершин совпадает с множеством вершин самого графа.

Вершины называются смежными , если существует ребро , их соединяющее.

Два ребра G1 и G2 называются смежными, если существует вершина, инцидентная одновременно G1 и G2.

Каждый граф можно представить в пространстве множеством точек, соответствующих вершинам, которые соединены линиями, соответствующими ребрам (или дугам - в последнем случае направление обычно указывается стрелочками). - такое представление называется укладкой графа.

Доказано, что в 3-мерном пространстве любой граф можно представить в виде укладки таким образом, что линии, соответствующие ребрам (дугам) не будут пересекаться во внутренних точках. 2

Гранью графа, изображенного на некоторой поверхности, называется часть поверхности, ограниченная рёбрами графа.

Данное понятие грани, по - существу, совпадает с понятием грани многогранника. В качестве поверхности в этом случае выступает поверхность многогранника. Если многогранник выпуклый, его можно изобразить на плоскости, сохранив все грани. Это можно наглядно представить следующим образом: одну из граней многогранника растягиваем, а сам многогранник «расплющиваем» так, чтобы он весь поместился внутри этой грани. В результате получим плоский граф. Грань, которую мы растягивали «исчезнет», но ей будет соответствовать грань, состоящая из части плоскости, ограничивающей граф.

Таким образом, можно говорить о вершинах, рёбрах и гранях многогранника, а оперировать соответствующими понятиями для плоского графа.

Пустым называется граф без рёбер. Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

Конечная последовательность необязательно различных рёбер E1,E2,...En называется маршрутом длины n, если существует последовательность V1, V2, ... Vn необязательно различных вершин, таких, что Ei = (Vi-1,Vi ).

Если совпадают, то маршрут замкнутый.

Маршрут, в котором все рёбра попарно различны, называется цепью.

Замкнутый маршрут, все рёбра которого различны, называется цик-лом. Если все вершины цепи или цикла различны, то такая цепь или цикл называются простыми.

Маршрут, в котором все вершины попарно различны, называется простой цепью.

Цикл, в котором все вершины, кроме первой и последней, попарно различны, называется простым циклом.

Граф называется связным, если для любых двух вершин существует путь, соединяющий эти вершины.

Любой максимальный связный подграф (то есть, не содержащийся в других связных подграфах) графа G называется компонентой связности. Несвязный граф имеет, по крайней мере, две компоненты связности.

Граф называется k - связным (k - реберно - связным), если удаление не менее k вершин (ребер) приводит к потере свойства связности.

Маршрут, содержащий все вершины или ребра графа и обладающий определенными свойствами, называется обходом графа.

Длина маршрута (цепи, простой цепи) равна количеству ребер а порядке их прохождения. Длина кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины vi и vj в графе G, называется расстоянием d (vi, vj) между vi и vj.

Степень вершины - число ребер, которым инцидентна вершина V, обозначается D(V).

С помощью различных операций можно строить графы из более простых, переходить от графа к более простому, разбивать графы на более простые и т.д.

Среди одноместных операций наиболее употребительны: удаление и добавление ребра или вершины, стягивание ребра (отождествление пары смежных вершин), подразбиение ребра (т.е. замена ребра (u, v) на пару (u, w), (w, v), где w - новая вершина) и др.

Известны двуместные операции: соединение, сложение, различные виды умножений графов и др. Такие операции используются для анализа и синтеза графов с заданными свойствами.

Два графа G1=(V1;E1), G2=(V2;E2),называются изоморфными, если существует взаимнооднозначное соответствие между множествами вершин V1 и V2 и между множествами рёбер Е1 и Е2, такое, чтобы сохранялось отношение инцидентности.

Понятие изоморфизма для графов имеет наглядное толкование. Представим рёбра графов эластичными нитями, связывающими узлы – вершины. Тогда, изоморфизм можно представить как перемещение узлов и растяжение нитей.

Связный граф без циклов называется деревом.

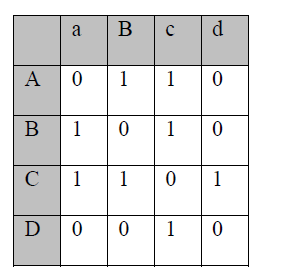
Деревья особенно часто возникают на практике при изображении различных иерархий. Например, популярные генеалогические деревья.

Способы задания графов:

1. Геометрический:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | |  | |  | |
|  |  | |  | |  | |  |
|  |  | |  | |  | |  |
|  |  | |  | |  | |  |
|  |  | |  | |  | |  |

2. Матрица смежности:

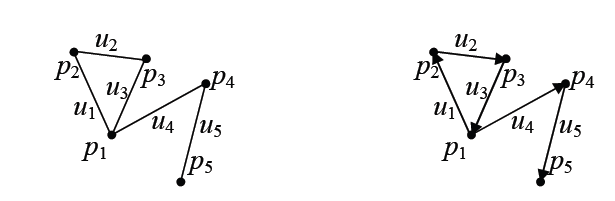
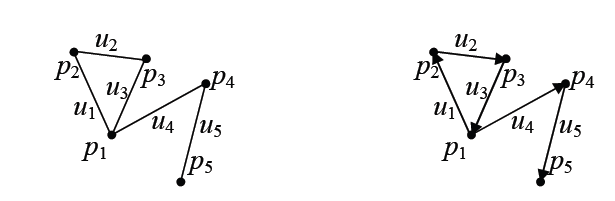


Матрица смежности - квадратная матрица, размерности, равной количеству вершин. При этом а[ i, j ]-целое число, равное количеству рёбер, связывающих i-ю, j-ю вершину. Если в графе нет петель, то диагональные элементы равны 0 .

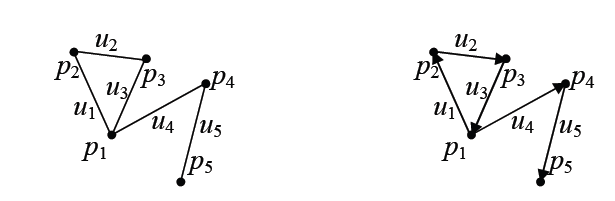
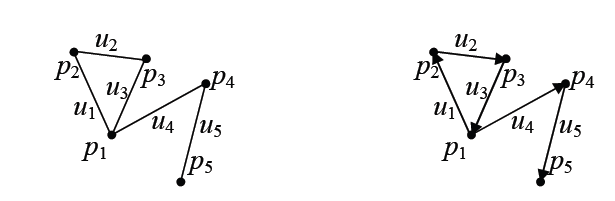
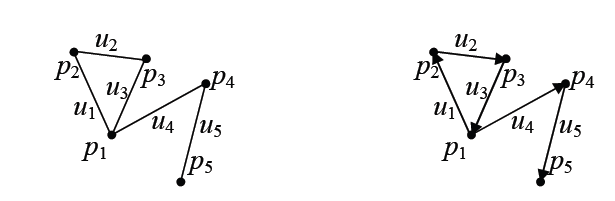
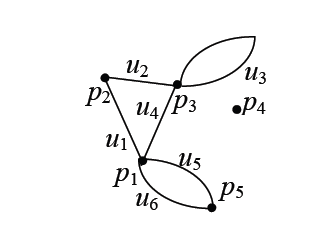
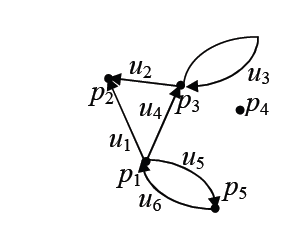
Если рёбра не повторяются, то все элементы 0 или 1. Если граф неориентированный, то матрица симметрична.

3. Матрица инцидентности:

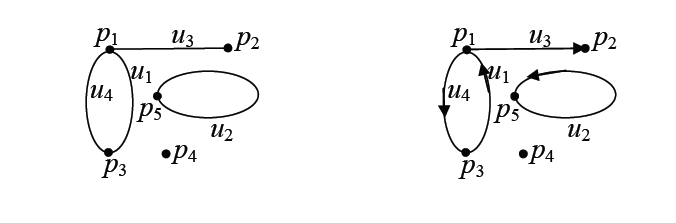
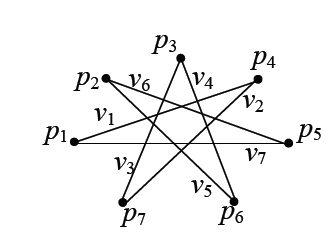
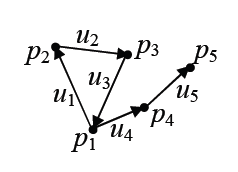


**Задания для самостоятельной работы**

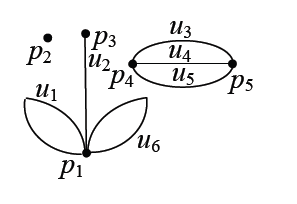
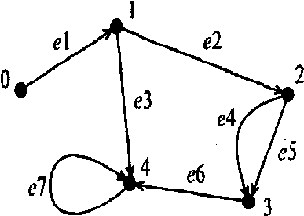
**Вариант1**



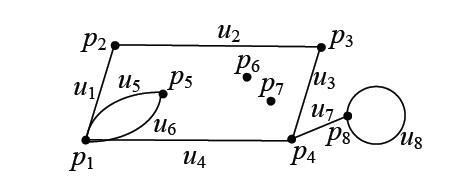
**Вариант2**

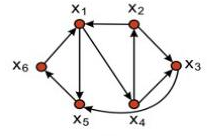


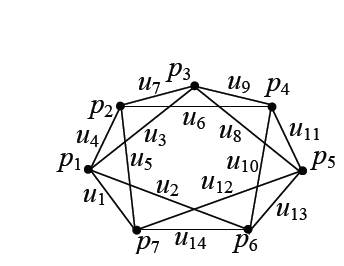
**Вариант3**



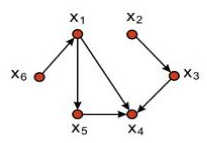
**Вариант4**

****





**Вариант5**



# Лабораторные работы 16-17Определение эйлерова цикла в графе. Гамильтоновы графы

**Цель занятия:** изучить алгоритм поиска эйлерова, гамильтонова цикла (пути) в графе, рассмотреть на конкретных примерах ориентированные и неориентированные графы

**Норма времени**: 4 часа

**Методическое обеспечение:** методические указания к практической работе

**Теоретические сведения:**

Эйлеровы графы

К задачам на Эйлеровы графы относятся головоломки, в которых требуется вычертить на плоскости одним росчерком замкнутые кривые, обводя каждый участок в точности один раз. Введём следующие понятия.

Эйлеровым путём в графе называется путь, содержащий все рёбра графа. Эйлеровым циклом или эйлеровой цепью называется цикл, содержащий все рёбра графа и притом по одному разу.

Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется эйлеровым графом. Замкнутую линию, если её можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, проходя при этом каждый участок в точности один раз, принято называть уникурсальной.

Рисунок графа, обладающий эйлеровым путём или эйлеровым циклом, является уникурсальной линией.

Докажем следующие две теоремы

Теорема 1. Если граф G(V, E) обладает эйлеровым циклом, то он связный и все его вершины четные.

Доказательство. Связность графа следует из определения эйлерова цикла. Эйлеров цикл содержит каждое ребро и притом только один раз, поэтому, сколько раз эйлеров путь приведет конец карандаша в вершину, столько и выведет, причём уже по одному ребру. Следовательно, степень каждой вершины графа должна состоять из двух одинаковых слагаемых: одно - результат подсчета входов в вершину, другое - выходов.

Теорема 2. Если граф G(V, E) связный и все его вершины четные, то он обладает эйлеровым циклом.

Доказательство. Если начать путь из произвольной вершины графа g(v, E), то найдётся цикл, содержащий все рёбра графа. Пусть vi - произвольная вершина. Из vi начнём путь по 1 по одному из рёбер и продолжим его, проходя каждый раз по новому ребру. Все вершины графа имеют чётные степени, поэтому если l есть «выход» из vi, то должен быть и «вход» в vi, также как и для любой вершины другой вершины. И если есть «вход» в вершину, то должен быть и «выход». Так как число

ребер конечно, то это путь должен окончиться, причём в вершине vi . Если путь, замкнувшийся в vi, проходит через все рёбра графа, то мы получим искомый эйлеров цикл.

Для построения эйлерова цикла в связном графе со всеми вершинами чётной степени применяется следующий алгоритм:

Выйти из произвольной вершины vi. Каждое пройденное ребро зачеркнуть.

Если путь l1 замыкается в у и проходит через все рёбра графа, то получим искомый эйлеров цикл.

Если остались непройденные рёбра, то должна существовать вершина v2, принадлежащая l1 и ребру, не вошедшему в l1.

Так как v2 - чётная, то число рёбер, которым принадлежит v2 и которые не вошли в путь l1, тоже чётно. Начнём новый путь l2 из у и используем только рёбра, не принадлежащие l1. Этот путь кончится в v2.

Объединим теперь оба цикла: из vi пройдём по пути l1 к v2, затем по l2 и, вернувшись в v2, пройдём по оставшейся части l1 обратно в vi.

Если снова найдутся рёбра, которые не вошли в путь, то найдём новые циклы. Так как число рёбер и вершин конечно, то процесс закончится.

Таким образом, замкнутую фигуру, в которой все вершины чётные, можно начертить одним росчерком без повторений и начиная с любой точки.

На практике эйлеровым графом может быть план выставки; это позволяет расставить указатели маршрута, чтобы посетитель смог пройти по каждому залу в точности по одному разу.

Гамильтоновы графы

Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется гамильтоновым графом.

Гамильтоновым циклом, или путём в графе, называется цикл, или путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.

Эйлеровы и гамильтоновы пути сходны по способу задания. Первые содержат все рёбра, и притом по одному разу, вторые - все вершины по одному разу. Но, несмотря на внешнее сходство, задачи их отыскания резко отличаются по степени трудности. Для решения вопроса о существовании эйлерова цикла в графе достаточно выяснить, все ли его вершины чётные.

Критерий же существования гамильтонова цикла на произвольном графе ещё не найден.

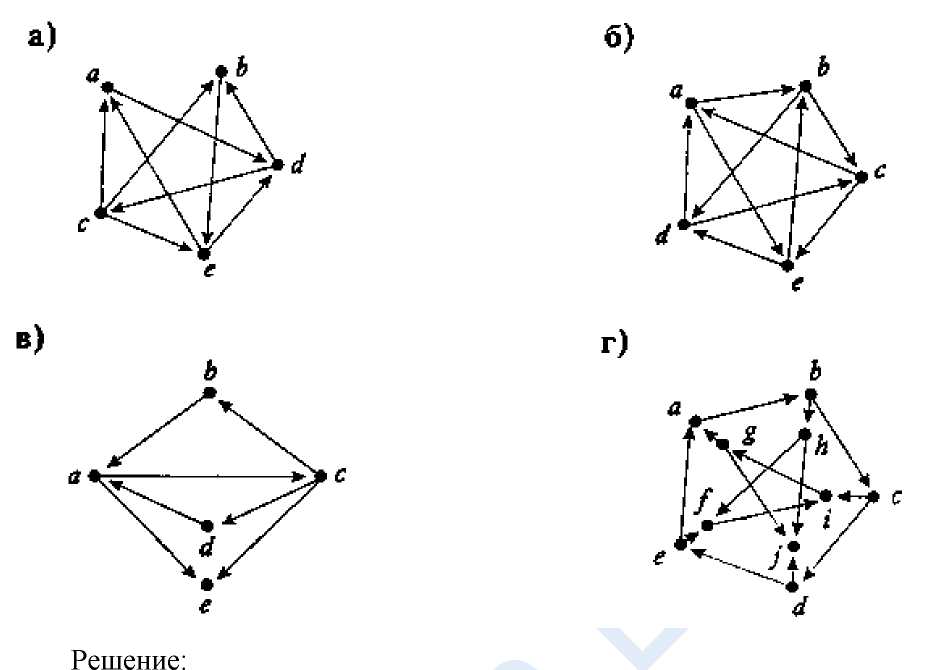
Однако есть несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов в графе:

1. Всякий полный граф является гамильтоновым, так как он содержит простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа.
2. Если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие рёбра, то он также является гамильтоновым.
3. Если граф имеет один гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы.

.

**Задания для самостоятельной работы**

Какие из следующих ориентированных графов имеют эйлеровы и гамильтоновы циклы? .



а) Граф связный, найдём степени входа и выхода вершин (по теореме 5 степени входа и выхода каждой вершины должны совпадать):

indeg(a)=2, outdeg(a)=1, то есть нашлась вершина, у которой не совпадают степени входа и выхода, значит, граф не имеет эйлерова цикла.

б) Граф связный, найдём степени вершин:

indeg(a)=2 outdeg(a)=2

indeg(b)=2 outdeg(b)=2

indeg(c)=2 outdeg(c)=2

indeg(d)=2 outdeg(d)=2

indeg(e)=2 outdeg(e)=2

Следовательно, по теореме 5, граф имеет эйлеров цикл.

в) Граф связный, найдём степени вершин:

indeg(a)=2 outdeg(a)=2

indeg(b)=1 outdeg(b)=1

indeg(c)=3 outdeg(c)=1

Условия теоремы 5 не выполняются, значит, граф не имеет эйлерова цикла.

г) Граф связный, найдём степени вершин:

indeg(a)=2 outdeg(a)=1

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Дайте определение эйлерова графа.
2. Сформулируйте алгоритм построения эйлерова цикла.
3. Какой граф называют гамильтоновым?
4. Существует ли эйлеров граф, обладающий висячей вершиной?
5. Чем отличается эйлеров путь от гамильтонова?

# Список рекомендуемой литературы

**Основные источники**

1. Анин, Б. Ю. Защита компьютерной информации / Б.Ю. Анин. — СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 2010. – 384 с.
2. Касперски, К. Записки исследователя компьютерных вирусов / К. Касперски. – СПб.: Питер, 2006. – 316 с.
3. Корнюшин, П.Н. Информационная безопасность / П.Н. Корнюшин, С.С. Костерин. – Владивосток: Изд-во ДвГУ, 2010. – 154 с.
4. Партыка Т.Л. Информационная безопасность / Т.Л. Партыка, И. И. Попов.— М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2012. — 432 с.

**Дополнительные источники**

1. Аскеров, Т. М. Защита информации и информационная безопасность / Т.М. Аскеров. — М.: Издательство РЭА им. Плеханова, 2009. – 387 с.
2. Будко, В.Н. Информационная безопасность и защита информации. Конспект лекций / В.Н. Будко. – Воронеж: Издательство ВГУ, 2010. – 86 с.
3. Сычев, Ю.Н. Основы информационной безопасности / Ю.Н. Сычев. – М.: Евразийский открытый институт, 2010. – 328 с.